Объемные примитивы Безье

Щетинин Д.В., Местецкий Л.М

Аннотация

В статье рассматриваются некоторые аспекты использования объемных объектов в трехмерных графических приложениях. Предлагается новый подход к описанию таких объектов с помощью объемных кривых и патчей Безье, которые представляют собой одно- и двухпараметрические (соответственно) семейства шаров. Приводятся алгоритмы визуализации этих примитивов посредством представления их в полигональном виде и метод решения задачи определения столкновений для этих объектов. Объемные кривые и патчи Безье могут использоваться в различных областях трехмерной компьютерной графики, в том числе и в интерактивных приложениях.

Keywords: Volumetric Graphics, Parametric Bezier Surfaces

1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в 3-хмерной компьютерной графике наиболее широко используются объекты, описанные с помощью поверхностей (обычно используются полигональные и параметрические модели), то есть граничное представление. Но существует ряд задач, для решения которых удобно или необходимо иметь информацию не только о границе (оболочке) объекта, но и о его внутренней структуре, обо всем занимаемом им объеме.

Одним из наиболее существенных недостатков описания объектов с помощью поверхностей является локальный характер этого представления — поверхность непосредственно не несет информации о структуре объекта в целом. Это усугубляется тем, что часто объекты имеют достаточно сложную форму и состоят не из одной, а из нескольких элементов-поверхностей. В результате целый ряд преобразований практически не доступен для таких объектов. Например, фигуру человека можно представить в виде набора поверхностей, но заставить такую модель пошевелить рукой достаточно сложно. Не меньшие трудности возникнут и при моделировании деформации органа человека в процессе хирургической операции: нужно уметь описывать и небольшие деформации отдельных участков поверхности, и изменения структуры объекта при более сильном воздействии. Такие и сходного характера преобразования либо сложно описать для объектов, описанных с помощью поверхностей, (обычно для этого требуются большие вычислительные затраты, например, для решения довольно громоздких систем уравнений), либо вообще невозможно задать без дополнительной информации (например, о т.н. скелете объекта).

Еще одна задача, решение которой для поверхностей связано с существенными и принципиальными трудностями — задача обнаружения столкновений (коллизий, взаимодействия, пересечения) объектов. Обычно эту задачу требуется решить для того, чтобы далее смоделировать результаты столкновения, в частности, соответствующим образом изменить форму столкнувшихся объектов. Для этого нужно определить момент и локализовать место пересечения объектов. Проблема во многом связана с тем, что поверхность (по определению) не имеет толщины, а поскольку проверка условий столкновения может производиться лишь в дискретные моменты времени, приходится либо интерполировать поведение объектов в промежутках между тестами (что требует слишком большого объема вычислений), либо жертвовать точностью (как в определении момента, так и места взаимодействия объектов). При этом уменьшение промежутка между проверками на столкновение существенной роли не играет.

Если же описывать объекты как объемы в пространстве, то погрешность при обнаружении столкновений будет существенно снижена и за счет увеличения частоты проверок может быть сведена к необходимому минимуму. А поскольку такое представление содержит информацию о структуре объекта в целом, оно позволяет просто и компактно описывать широкий спектр преобразований и деформаций взаимодействующих объектов.

Объемные объекты полезны и при решении целого ряда других задач (при обработке и изучении результатов трехмерного сканирования, при визуализации полупрозрачных объектов и сечений, создании спецэффектов и т.д.), что может найти применение в широком спектре приложений САПР, компьютерной графики, виртуальной реальности, моделирования, научной визуализации.

Несмотря на свои привлекательные свойства, объемное представление объектов до сих не нашло достаточно широкого применения на практике. В первую очередь это связано с тем, что для описания объемов требуется гораздо больше данных (и, соответственно, вырастает объем памяти, необходимый для хранения информации о них, замедляется обработка), а также трудностями с эффективной визуализацией (расчет поверхности объекта по его объему связан с определенными вычислительными затратами, что, естественно, тоже сказывается на производительности). Все это серьезно ограничивает применение объемных объектов в интерактивных приложениях.

Предлагаемый метод описания объектов снимает многие из этих трудностей, сохраняя при этом преимущества объемного представления объектов. Этот метод является обобщением так называемых двумерных жирных линий (кривых с толщиной) [1] на 3-хмерный случай.

Объекты трехмерной сцены предлагается описывать как набор одно- и двухпараметрических семейств шаров — объемных кривых и объемных патчей (соответственно). Сложные объекты будут собираться из них, поэтому в дальнейшем будет также использоваться термин „объемные примитивы“.

Объемную кривую можно рассматривать как след от перемещения шара с переменным радиусом вдоль некоторой кривой, объемный патч — как след от перемещения объемной кривой изменяющейся формы. При этом центры шаров, входящих в объемный патч, составляют некоторую гладкую поверхность в пространстве.

Каждому объемному примитиву можно поставить в соответствие кривую или поверхность в 4-хмерном пространстве (точнее, полупространстве $\Re^3 \times [0, \infty)$), рассматривая радиус как 4-ую координату.

Широко используемый на практике математический аппарат сплайнов Безье можно использовать и для описания объемных примитивов. Назовем объемными кривыми и патчами Безье те объемные примитивы, которым соответствуют кривые и патчи Безье в 4-хмерном пространстве.

Объемные примитивы Безье являются универсальным инструментом, позволяя описывать объекты сложной формы, сохраняя при этом преимущества обычных кривых и поверхностей Безье: простоту и компактность математического описания, удобство практического использования. Так, например, объемные примитивы Безье полностью определяются положением и радиусами своих контрольных шаров, что дает возможность легко изменять форму и описывать деформации объектов (простым изменением положения и радиуса контрольных шаров).

В данной статье приводится математическое определение объемных кривых и патчей, описываются алгоритмы визуализации объемных примитивов и метод обнаружения столкновений (collision detection) объемных примитивов с различными видами объектов.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ КРИВЫХ И ПАТЧЕЙ

Рассмотрим одно- и двухпараметрические семейства шаров:

$$S(\tau) = \{\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \Re^3 : \sum_{i=1}^{3} (v_i - s_i(\tau))^2 \leq r^2(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}, \quad (1)$$

$$S(\alpha, \beta) = \{\vec{v} \in \Re^3 : \sum_{i=1}^{3} (v_i - s_i(\alpha, \beta))^2 \leq r^2(\alpha, \beta), \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \beta \in [\beta_1, \beta_2]\}. \quad (2)$$

Назовем объединение $L = \bigcup_{\tau \in [\tau_1, \tau_2]} S(\tau)$ шаров семейства (1) объемной кривой, а объединение шаров $P = \bigcup_{\substack{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \\ \beta \in [\beta_1, \beta_2]}} S(\alpha, \beta)$ семейства (2) — объемным патчем.

Шары $S(\tau_1)$ и $S(\tau_2)$ назовем концевыми шарами объемной кривой (1), а объемные кривые $S(\alpha_1, \beta), S(\alpha_2, \beta), S(\alpha, \beta_1), S(\alpha, \beta_2)$ — концевыми объемными кривыми патча (2). Кривую $\vec{s}(\tau)$ и поверхность $\vec{s}(\alpha, \beta)$ обозначим как серединную ось объемной кривой и серединную поверхность объемного патча соответственно.

Объемной кривой Безье назовем объемную кривую, удовлетворяющую условиям:

$$s_i(\tau) = \sum_{j=0}^{m} c_i^j \cdot B_m^j(\tau), i = 1, 2, 3$$
$$r(\tau) = \sum_{j=0}^{m} r^j \cdot B_m^j(\tau),$$

где $B_m^i(\tau) = \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) \cdot \tau^i \cdot (1-\tau)^{m-i}, i = 0, ...m$ — полиномы Бернштейна.

Пара $C^j = \left\langle \vec{c}^j, r^j \right\rangle$ (где $j = 0, 1, ...m$) задает шар радиуса r^j с центром в точке $\vec{c}^j = (c_1^j, c_2^j, c_3^j)$. Совокупность шаров $C = \{C^0, C^1, ...C^m\}$ есть множество контрольных шаров объемной кривой Безье.

Аналогично определяется объемный патч Безье с контрольными шарами $C = \left\{C^{i,j}, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,m}\right\}$:

$$s_k(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_k^{i,j} \cdot B_n^i(\alpha) \cdot B_m^j(\beta), k = 1, 2, 3$$
$$r(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} r^{i,j} \cdot B_n^i(\alpha) \cdot B_m^j(\beta).$$

Примеры объемной кривой и патча Безье представлены на рис. 1 и 2.

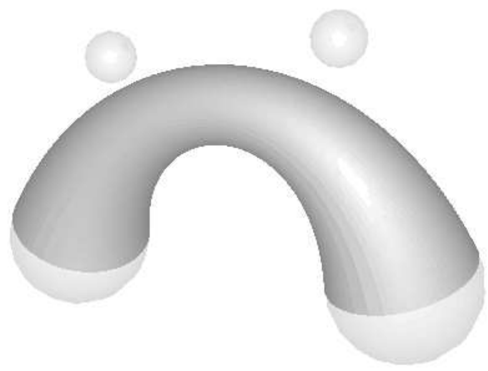

Рис. 1: Объемная кривая Безье и ее контрольные шары

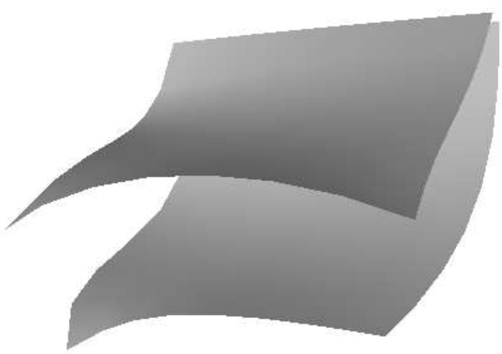

Рис. 2: Объемный патч Безье (без концевых кривых)

Как уже отмечалось, аналогично обычным кривым и патчам Безье, форма объемных кривых и патчей Безье может быть изменена с помощью простых манипуляций с контрольными шарами: перемещением их центров и изменением их радиусов (см. рис. 3).

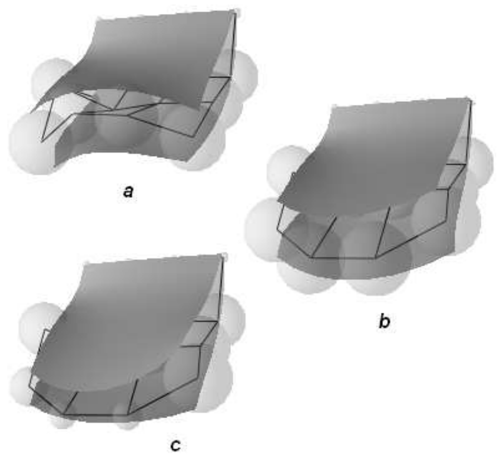

Рис. 3: Управление объемными патчами Безье через контрольные шары

Таким образом, объемные кривые и патчи сохраняют (наследуют) простоту и удобство манипулирования (проверенные практикой) обычных кривых и патчей Безье, что является весьма полезным и важным свойством для приложений трехмерного моделирования, дизайна, САПР и т.п.

3 ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЪЕМНЫХ ПРИМИТИВОВ

Первой проблемой, которую требуется решить для практического использования объемных примитивов, является их визуализация. Поскольку эти примитивы предназначены в первую очередь для использования в интерактивных приложениях, то есть, в приложениях, где важна скорость, визуализации объемных примитивов можно (и следует) свести к задаче представления их в полигональном виде (как допускающем наиболее быстрое построение двумерного изображения на экране).

Таким образом, требуется построить аппроксимацию границы объемного примитива набором многоугольников (обычно в компьютерной графике используются треугольники).

Граница жирной линии состоит из точек $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ семейства сфер

$$F(\vec{v}, \tau) = \sum_{i=1}^{3} (v_i - s_i(\tau))^2 - (r(\tau))^2 = 0, \tau \in [a, b].$$

Искомой границей будет являться огибающая поверхность этого семейства, если она существует. Огибающая семейства сфер известна как каналовая поверхность [4, 5].

Для произвольного семейства поверхностей $F(\vec{v}, t) = 0$ огибающая задается условием [4]:

$$\begin{cases} F(\vec{v}, t) = 0 \\ \frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

В нашем случае это выражение принимает вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} (v_i - s_i(\tau))^2 - (r(\tau))^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} (v_i - s_i(\tau)) \cdot \dot{s}_i(\tau) + r(\tau) \cdot \dot{r}(\tau) = 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра τ эта система определяет характеристику (кривую, вдоль которой огибающая касается отдельной поверхности семейства) семейства сфер. Как известно [4], характеристической кривой семейства сфер является окружность, параллельная нормальной плоскости кривой $\vec{s}(\tau)$ (см. рис. 4).

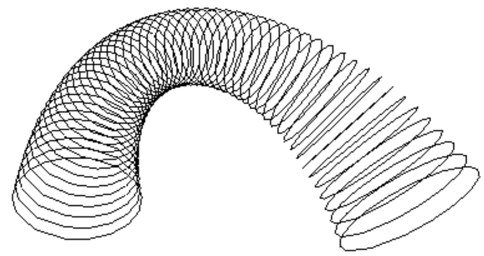

Рис. 4: Характеристики объемной кривой

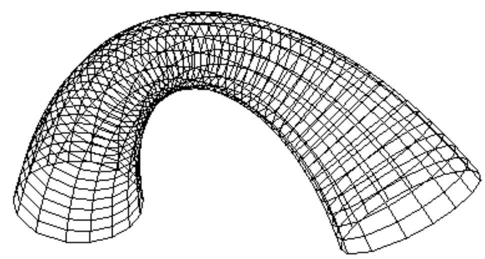

Рис. 5: Формирование поверхности объемной кривой

При визуализации объемной кривой эти окружности аппроксимируются многоугольниками, которые затем попарно соединяются некоторой боковой поверхностью. В результате образуется искомая аппроксимирующая полигональная поверхность объемной кривой (рис 5).

Граница объемного патча есть огибающая соответствующего двухпараметрического семейства сфер. Зафиксировав значение одного из параметров, получим однопараметрическое семейство сфер, то есть объемную кривую. Таким образом, огибающая двухпараметрического семейства шаров будет образована из точек пересечения характеристических окружностей семейств отдельно по первому и второму параметру. Из пар точек пересечения этих окружностей формируются пара поверхностей, составляющих вместе с соединяющими их частями поверхностей концевых объемных кривых аппроксимацию поверхности объемного патча. Осталось лишь объединить полученные вершины соответствующим образом в многоугольники — см. рис. 6.

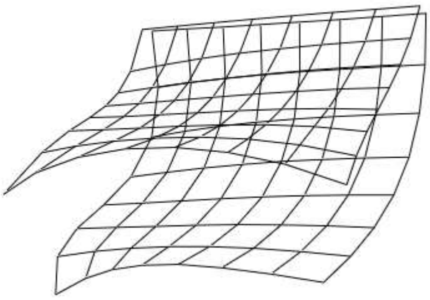

Рис. 6: Формирование поверхности объемного патча

Таким образом, для объемного примитива может быть достаточно быстро получено граничное представление, что позволяет визуализировать их обычным способом как полигональную поверхность.

4 ОБНАРУЖЕНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

Задача обнаружения столкновений объектов состоит в определении момента и локализации места пересечения объемов, занимаемых объектами сцены. В нашем случае требуется алгоритм, решающий эту задачу для объемных примитивов Безье. Объекты, наличие пересечения с которыми требуется определить, назовем проверяемыми объектами. Простейшим типом проверяемых объектов является точка. Эту задачу нужно решить также и для других видов объектов, в частности для полигональных и параметрически заданных поверхностей, а также объемных примитивов. Для локализации места столкновения в объемном примитиве достаточно определить, какие именно шары семейства пересекаются с проверяемым объектом, то есть найти значения соответствующих параметров (τ для объемной кривой, или (α, β) для объемного патча).

Решение проблемы обнаружения столкновений для объемных примитивов Безье „в лоб“ приводит к необходимости решать задачу минимизации функции расстояния от серединной оси или патча. Эта функция является полиномом и ее минимизация (уже для примитивов Безье третьего порядка) требует слишком больших вычислительных затрат. В статье [1] предлагается алгоритм представления жирной двумерной кривой Безье в неявном виде, основанный на методе Штурма. Этот подход достаточно просто адаптируется для 3-хмерного случая. Но он позволяет получить алгоритм обнаружения столкновений только для объемной кривой и точки, обобщить его для более сложных, чем точка, объектов (например, треугольников) и для объемных патчей (пока) не удалось.

В данной статье предлагается другая схема. Алгоритм обнаружения столкновений разбивается на два этапа.

Сначала осуществляется грубая оценка взаимного расположения объектов и отсеиваются те, которые расположены далеко от объемного примитива и заведомо не могут с ним пересекаться. С этой целью для примитива Безье строится ограничивающий объем — объем, которому принадлежит каждая точка объемного примитива. Следовательно, если проверяемый объект не пересекается с ограничивающим объемом, то заведомо он не пересекается и с самим примитивом.

Ограничивающий объем должен быть выбран таким образом, чтобы его построение и проверка пересечений выполнялись достаточно быстро. При этом желательно, чтобы сам ограничивающий объем как можно более точно соответствовал объему примитива (для отсеивания возможно большего числа объектов). Возможны различные варианты выбора ограничивающих объемов, один из самых простых и при этом эффективных вариантов — использование параллелепипедов. Для объемных примитивов Безье ограничивающий параллелепипед построить достаточно просто, воспользовавшись тем, что кривые и патчи Безье полностью лежат внутри выпуклой оболочки своих контрольных точек. Это свойство выполняется и для объемных кривых и патчей Безье (в чем не сложно убедиться). Таким образом, для построения ограничивающего параллелепипеда достаточно найти максимальные и минимальные координаты по каждой из осей среди точек, принадлежащих контрольным шарам (рис. 7).

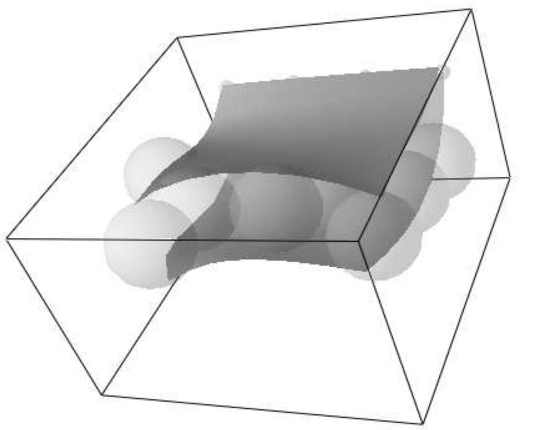

Рис. 7: Ограничивающий параллелепипед

В общем случае, использование ограничивающих объемов можно продолжить, разбив объемный примитив на части и выполнив аналогичные проверки для полученных частей. Такая декомпозиция объемного примитива выполняется аналогично декомпозиции обычных кривых и патчей Безье. В результате получаем две объемные кривые или четыре объемных патча, которые в совокупности образуют исходный примитив. На рис. 8 приведен пример такой декомпозиции и показан ограничивающий параллелепипед одного из полученных в ее результате патчей.

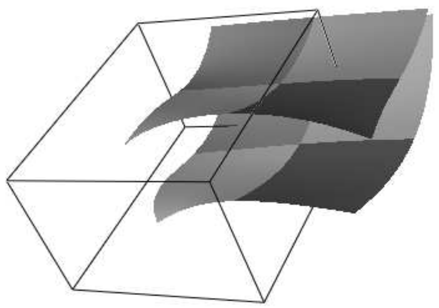

Рис. 8: Декомпозиция объемного патча

На втором этапе выполняется более точный анализ положения оставшихся проверяемых объектов относительно полученных в результате декомпозиции объемных примитивов. Для этого объемный примитив аппроксимируется набором простых объектов (составляющих), пересечение которых с проверяемым объектом обнаруживается достаточно просто. Аппроксимирующее множество строится в цикле по параметру τ (или в двойном цикле по α и β). Таким образом, каждой составляющей соответствует диапазон значений параметров объемного примитива, что позволяет локализовать место столкновения в нем. Для объемной кривой в качестве составляющих можно использовать цилиндры, основаниями которых являются пары соседних характеристических окружностей, а для объемного патча — тетраэдры, образуемые тройкой соседних вершин на одной (аппроксимирующей полигональной) поверхности патча и (соответствующей) противолежащей вершиной на другой поверхности.

Проверив наличие пересечения каждой из полученных составляющих с каждым проверяемым объектом, получаем с некоторой точностью решение исходной задачи. Точность полученного решения зависит от формы примитива (линейности его границы) и количества составляющих (шага циклов по параметрам).

В описанном алгоритме не уточняется, при выполнении какого условия осуществляется переход от первого этапа ко второму. Здесь возможны различные варианты, и вопрос о том, какой из них делает алгоритм более эффективным в различных ситуациях, требует отдельного исследования.

Данная схема позволяет решать задачу обнаружения столкновений в реальном времени с требуемой точностью.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, объемные примитивы Безье сочетают в себе богатые возможности объемных моделей и основные преимущества (эффективность, компактность, простоту) граничного представления объектов. Это делает их потенциально полезным инструментом в приложениях САПР, трехмерного моделирования, виртуальной реальности, для создания мультимедийных презентаций, программ обучения, компьютерных игр, для использования трехмерных изображений в Internet.

В дальнем планируется решить еще ряд задач, связанных с практическим применением объемных примитивов: разработать методы преобразования граничного представления объектов в объемное (в том числе для моделей, созданных в существующих 3-хмерных приложениях), создать алгоритмы описания деформаций требуемого вида, визуализации сечений объемных примитивов, обеспечить возможность использования объемных примитивов в Internet (например, в рамках языка 3DML).

Список литературы

[1] L.M.Mestetskii. Fat curves and representation of planar figures// Computers & Graphics. 2000. V. 24, 1. P. 9–21.

[2] M. Peternell and H. Pottmann. Computing Rational Parametrization of Canal Surfaces// J. Symbolic Computation. 1997. 23. P. 255–266.

[3] Wei Lü, Helmut Pottmann. Pipe surfaces with rational spine curve are rational.
Computer Aided Geometric Design. 1996. 13. P. 621–628.

[4] А.П.Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958.

[5] H. Pottmann and M. Peternell. Envelopes — Computational Theory and Applications// In Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Budmerice. 2000. P. 3–23.